# משפט(זה המשפט האחרון משיעור קודם)

אם ורק אם לכל תת סדרה יש תת סדרה המתכנסת לa

## הוכחה

נניח ש. אזי קיים כך ש עבור אינסוף אינדקסים.

# הגדרה

אם a הינו גבול של תת סדרה של נגיד שa הינו גבול חלקי של הסדרה

# משפט

תהי סדרה אזי אם ורק אם לכל תת סדרה של יש תת סדרה המתכנסת לa.

## הוכחה

נוכיח שאם אזי קיים תת סדרה שאין לה תת סדרה שמתכנסת לa

### הוכחה

נניח ש אזי קיים כך ש עבור אינסוף אינדקסים n. ניקח כך ש ניקח כך ש. באופן אינדוקטיבי נבחר באינדקסים כך שלכל k . ברור ש מהווה תת סדרה של . בנוסף לכך אף תת סדרה של יכולה להתכנס לa שכן לכל .

#### הערה

שימו לב לכך שהמשפט לא אומר שסדרה מתכנסת אם ורק אם לכל תת סדרה שלה יש תת סדרה שמתכנסת.

למשל הסדרה לא מתכנסת אבל לכל תת סדרה שלה יש תת סדרה מתכנסת.

# משפט

לכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית

## הוכחה

תהי סדרה. נקרא לאיבר דומיננטי אם לכל . אזי או שקיימים אינסוף איברים דומיננטים או שלא. אם כן, קיימים אינדקסים כך שלכל k, לכל בפרט . במקרה זה יש לנו את הסדרה הלא עולה   
אם קיימים אך ורק מספר סופי של איברים דומיננטים ניקח N כך שאם אינו דומיננטי. ז"א שאם אזי קיים כך ש. נבחר . ניקח כך ש. באופן אינדוקטיבי נבחר באינדקסים כך ש. ז"א הסדרה הינה סדרה עולה

הוכחנו שבכל מקרה יש לסדרה תת סדרה מונוטונית.

# משפט

סדרה שאינה חסומה מלעיל(מלרע) יש לה תת סדרה המתכנסת ל()

## הוכחה

ניקח (אפשר לעשות זאת אחרת 1 היה חסם מלעיל). עכשיו ניקח כך ש(אם לא היה מספר כזה אזי היה חסם מלעיללסדרה בניגוד להנחה). נבחר באופן אינדוקטיבי אינדקסים כך ש לכל k. אזי הינה תת סדרה וברור ש שכן לכל k

# משפט בולצנו ווירשטראס(Bolzano-Weierstrass)

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

## הוכחה

חסומה אזי כל תת סדרה שלה חסומה אף היא. ע"פ מה שהוכחנו קיימת תת סדרה מונוטונית. תת סדרה זו מתכנסת לפי המשפט האומר שסדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

# משפט(בולצנו ווירשטראס במובן הרחב)

לכל סדרה יש תת סדרה המתכנסת במספר הרחב(ז"א או למספר סופי או ל או ל)

## הוכחה

זה ברור אם לא חסומה מלעיל או אם אינה חסומה מלרע. אם חסומה אזי כל תת סדרה שלה חסומה אף היא. ע"פ מה שהוכחנו קיימת תת סדרה מונוטונית. תת סדרה זו מתכנסת לפי המשפט האומר שסדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

# משפט

אם בסדרה יש אך ורק גבול חלקי אחד(במובן הרחב) אזי היא מתכנסת(במובן הרחב)

## הוכחה

נניח שהסדרה חסומה. יהי a הגבול החלקי היחיד שיש לסדרה. אזי לכל תת סדרה יש תת סדרה מתכנסת ע"פ משפט בולצנו ווירשטראס. הינה תת סדרה של . מכיוון שיש רק גבול חלקי אחד מתקיים . מכאן ש לפי המשפט הראשון של השיעור.  
במקרה ש אינה חסומה ההוכחה דומה. נניח למשל ש אינה חסומה מלעיל, אזי קיימת תת סדרה כך ש (ע"פ המשפט שהוכחנו). אבל לפי ההנחה יש אך ורק גבול חלקי אחד ל ז"א שכל תת סדרה של שמתכנסת חייבת להתכנס ל. לכן אם קיים K כך ש אינסופית ואז לפי משפט בולצנו ווירשטראס קיים עוד גבול חלקי במובן הרחב בניגוד להנחה.

# הגדרה

הסדרה נקראת סדרת קושי(Cauchy) אם לכל קיים N כך שעבור מתקיים

# משפט

סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי

## הוכחה

נניח ש. יהי . קיים N כך שאם אזי . אזי אם גם מתקיים . לכן אם מתקיים לכן הסדרה מקיימת את תנאי קושי.

עכשיו נניח ש מקיימת את תנאי קושי. טענה: חסומה. הוכחה:  
אמנם קיים *N כך שעבור מתקיים , בפרט לכל ולכן לכל . נגדיר אזי לכל n. לכן ע"פ משפט בולצנו ווירשטראס קיימת תת סדרה שמתכנסת נגיד לa  
טענה:   
הוכחה: יהי , צ"ל קיים N כך שאם אזי . ידוע לנו ש ולכן קיים K כך שאם מתקיים נבחר כך שאם אזי (אפשר שכן סדרת קושי).  
עבור מתקיים מחד ולכן ומאידך ו ולכן . מכאן*

# הגדרה

תהי . נגיד ש אם

1. *לכל*

### דוגמאות

1. לקבוצה לא קיים
2. לכל קבוצה סופית יש
3. אם הקבוצה S חסומה מלעיל ו אזי

*אם*

1. *לכל*

### דוגמה

*אם ורק אם*

# הגדרה

תהי סדרה.

אם אינה חסומה מלעיל נגדיר

אם אינה חסומה מלרע נגדיר

*נניח ש חסומה מלעיל ונסמן בS את הקבוצה של גבולות חלקיים של אם (כך ש). נגדיר*

*אם S מכילה איבר שונה מ נגדיר*